

1 Гильбертовы пространства, тождество параллелограмма, теорема об элементе с наименьшей нормой

Гильбертово пр-во — нормированное пр-во бесконечно мерное, полное по $\|\cdot\|$, порожденной ск. пр., сепарабельное, линейное.

$H: \forall x, y \in H \Rightarrow (x, y) \in \mathbb{C}$

Св-ва:

- 1) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- 2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
- 3) $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$;
- 4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

Нер-во К-В: $|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|$, где $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$
 $\Rightarrow$ в ун. пр-ве можно ввести понятие $\|\cdot\|$:
 $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$

Ун. пр-во — частн. случай банах. пр-ва (мн. нормир. пр-во) $\Rightarrow$ все св-ва, ∇ -н д/банах. пр-ва справедливы и д/ун.

∇ (Тождество параллелограмма) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

$\triangle \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|x\|^2 + \|y\|^2 - (x, y) - (y, x) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

∇ (об эл-те с наим. $\|\cdot\|$) $\exists M \subset H$, где M — вып. и замкн. $\exists$ также $d = \inf_{x \in M} \|x\|$, тогда $\nexists$! эл-т $y \in M$: $\|y\| = d$

$\triangle d = \inf_{x \in M} \|x\| \Rightarrow \exists \{x_n\} \in M$ и $\|x_n\| \rightarrow d$. Покажем,

что x_n — фундамент.: $\|x_n - x_m\|^2 = 2(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - \frac{1}{2} \|x_n + x_m\|^2$

По спр., M — вып., if $\forall x, y \in M$ и $\forall \alpha \in (0, 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x d + y(1-d) \in M \Rightarrow \frac{x_n + x_m}{2} \in M \Rightarrow \frac{\|x_n + x_m\|}{2} \geq d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|x_n - x_m\|^2 \leq 2(\underbrace{\|x_n\|^2}_{\downarrow d^2} + \underbrace{\|x_m\|^2}_{\downarrow d^2}) - 4d^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \{x_n\} - \text{сбывающ.}$$

П.к. H -полное $\Rightarrow \exists y \in H$ и $\|x_n - y\| \rightarrow 0$
 M -замкн $\Rightarrow$ содержит все свои пред. точки $\Rightarrow y \in M$
 Осталось показать, что $\|y\| = d$:
 $d \leq \|y\| = \|y - x_n + x_n\| \leq \|y - x_n\| + \|x_n\| \xrightarrow{\rightarrow 0} d \Rightarrow \|y\| = d \Rightarrow$
 $\Rightarrow \exists y \in M$ и $\|y\| = d$.

□ $\|y\| = d, \|\tilde{y}\| = d; y, \tilde{y} \in M \Rightarrow \|y - \tilde{y}\|^2 = 2(\|y\|^2 + \|\tilde{y}\|^2) -$
 $-\underbrace{\left\| \frac{y + \tilde{y}}{2} \right\|^2}_{\in M} \cdot 4 \leq 2(\underbrace{\|y\|^2}_{\geq d^2} + \underbrace{\|\tilde{y}\|^2}_{\geq d^2}) - 4d^2 \leq 0 \Rightarrow y = \tilde{y} \blacksquare$